

Approche expérimentale et théorique de la conductivité thermique des milieux poreux humides—II. Théorie

CHRISTIAN MOYNE, JEAN-CHRISTOPHE BATSALE
et ALAIN DEGIOVANNI

Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée, Ecole des Mines,
Parc de Saurupt, F54042 Nancy Cedex, France

(Reçu le 19 Février 1988)

Résumé—Le problème de la conductivité thermique des milieux poreux humides est réexaminé d'un point de vue théorique en utilisant la méthode de prise de moyenne. Les phénomènes considérés sont le transport conductif de la chaleur et la diffusion de la vapeur dans la phase gazeuse. En partant des équations de bilan écrites pour chacune des phases on déduit une équation de l'énergie et une équation pour le transport de la vapeur pour le milieu continu équivalent au milieu poreux. A l'aide d'une fermeture du système, on donne les expressions des coefficients de transport moyens que l'on détermine effectivement dans le cas du milieu périodique monodimensionnel (milieu "série") et d'un milieu périodique bidimensionnel. Cette analyse conduit à distinguer nettement la conductivité thermique vraie introduite par la loi de Fourier et la conductivité thermique apparente du modèle de transfert et définit rigoureusement le facteur de résistance à la diffusion gazeuse en milieu poreux. Elle est comparée aux théories classiques ainsi qu'à nos résultats expérimentaux précédemment publiés. Dans l'hypothèse expérimentalement la plus réaliste où les parois des pores sont complètement humides, l'analyse de Krischer est correcte. En revanche la méthode suggérée par De Vries ne permet pas d'atteindre expérimentalement le facteur de résistance à la diffusion. En effet la conductivité thermique vraie n'est pas la conductivité que l'on pourrait obtenir en ne considérant que le transfert de chaleur conductif. C'est ce qui explique les valeurs anormalement élevées observées pour ce facteur lors de l'utilisation de cette méthode.

1. INTRODUCTION

DANS UNE étude précédente, à partir de l'écriture d'un modèle de transfert couplé chaleur-masse en milieu poreux nous avons défini les différentes notions de conductivité qui apparaissent dans l'analyse du transfert thermique dans les milieux poreux humides [1]. En particulier nous avons distingué la conductivité thermique vraie λ introduite par la loi de Fourier et la conductivité thermique apparente k qui seule est mesurable dans un processus pour lequel les gradients d'humidité et de pression sont négligeables au sein du milieu. Ces deux grandeurs sont liées par la relation :

$$k = \lambda + f\lambda_{\text{dif}} \quad (1)$$

où

$$\lambda_{\text{dif}} = \frac{\mathcal{D}}{RT} \Delta h_v \frac{M_a M_v}{M} \frac{dp_{vs}}{dT}$$

f est le facteur de résistance à la diffusion en milieu poreux, c'est-à-dire le facteur multiplicatif qu'il faut introduire dans le terme diffusif de la loi de Fick pour tenir compte de la présence des phases liquide et solide.

L'impossibilité de déterminer expérimentalement λ dans la relation (1) nous a conduits dans l'interprétation des résultats de la première partie [2] à remplacer λ par la conductivité thermique λ_0 cor-

respondant au milieu sans effet d'évaporation-condensation c'est-à-dire mesurée à basse température (la conductivité thermique intrinsèque de chacune des phases varie très peu avec la température). D'où conformément à une démarche suggérée initialement par Philip et De Vries [3–5], nous avons introduit en lieu et place de f un facteur f_{exp} par la relation :

$$k = \lambda_0 + f_{\text{exp}} \lambda_{\text{dif}} \quad (2)$$

L'objectif de ce travail est d'examiner les fondements microscopiques d'une telle analyse, c'est-à-dire en partant des équations de transport écrites pour chacune des phases au niveau des pores de déduire les équations de transport macroscopiques pour le milieu poreux assimilé à un milieu continu. La démarche par ailleurs classique va faire un usage systématique des techniques de prise de moyenne. Toutefois vu la complexité des mécanismes mis en jeu et pour ne pas alourdir à l'excès une telle étude, nous limiterons notre analyse en supposant d'une part que la phase liquide est immobile et d'autre part que le transfert massique en phase gazeuse a lieu uniquement par diffusion.

Ce qui nous intéresse particulièrement ici est de calculer les coefficients de transport macroscopiques à partir de la connaissance des propriétés intrinsèques de chaque phase et de la morphologie du milieu. Bien sûr un calcul explicite requiert une connaissance "par-

NOMENCLATURE

A	interface	Other symbols	
C	barycentre du volume élémentaire représentatif	$\langle \rangle$	valeur moyenne
c_p	chaleur massique à pression constante	$\langle \rangle^\alpha$	valeur moyenne intrinsèque à la phase α .
\mathcal{D}	coefficient de diffusion binaire air-vapeur	Symboles grecs	
e	épaisseur	δ	coefficient (cf. équation (28))
f, f_{ij}	facteur de résistance à la diffusion	δ_{ij}	symbole de Kronecker
G_α	barycentre de la phase α	ε_α	fraction volumique de phase α
Δh_v	chaleur latente de vaporisation	λ, λ_{ij}	conductivité thermique vraie
I_{ij}^α	tenseur d'inertie de la phase α	λ_{dif}	conductivité thermique d'origine diffusive
k, k_{ij}	conductivité thermique apparente	λ_0	conductivité thermique du milieu sans effet d'évaporation-condensation
L	dimension caractéristique du milieu	ρ	masse volumique
l	dimension caractéristique des pores	χ_i^z, ξ_i^z	fonctions vectorielles définies sur la phase α
M	masse molaire	ψ_α	grandeur définie sur la phase α
M, M'	points fixes du milieu	ω_v	fraction massique de vapeur.
$\langle \dot{m} \rangle$	masse d'eau qui s'évapore par unité de volume et par unité de temps à l'intérieur du volume élémentaire représentatif	Indices	
n_i^α	normale extérieure à la phase α	a	air
P	pression totale	e	entrée-sortie
p_v	pression de vapeur	exp	expérimental
R	constante des gaz parfaits	g	gaz
r_0	dimension caractéristique du volume élémentaire représentatif	i, j, k	indices d'espace ($\in \{1, 2, 3\}$)
S	saturation en phase liquide	l	liquide
T	température	s	solide
V	volume	v	vapeur
x_i, y_i	variables d'espaces	vs	vapeur saturante
x_v	fraction molaire de vapeur.	α, β	relatif à la phase α, β
		\sim	fluctuation spatiale
		*	valeur modifiée.

faite" de la géométrie ce qui revient en pratique à considérer des milieux périodiques. Dans le cas extrêmement simple de milieux en série, nous pourrions poursuivre le calcul analytiquement jusqu'à son terme. Enfin nous examinerons un cas bidimensionnel à l'aide d'une résolution numérique.

2. FORMULATION DES EQUATIONS AU NIVEAU MICROSCOPIQUE

2.1. Les équations microscopiques

Le milieu poreux est constitué d'une phase solide (s) indéformable, d'une phase liquide (l) supposée immobile et d'une phase gazeuse (g). La phase gazeuse est constituée de deux composants: l'air (a) et la vapeur (v). Le problème est simplifié en ne prenant en compte que le transport diffusif en négligeant les termes convectifs. L'équation pour la fraction massique de vapeur ω_v s'écrit alors:

$$\rho_g \frac{\partial \omega_v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho_g \mathcal{D} \frac{\partial \omega_v}{\partial x_i} \right) \quad (3)$$

en utilisant la convention de sommation implicite pour un indice latin répété.

L'équation de la chaleur dans la phase α ($\alpha = g, l, s$) s'écrit:

$$(\rho c_p)_\alpha \frac{\partial T_\alpha}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_\alpha \frac{\partial T_\alpha}{\partial x_i} \right). \quad (4)$$

(La phase liquide est supposée immobile et dans le bilan d'énergie thermique pour la phase gazeuse le transport de chaleur sensible par convection et diffusion massique est négligé.)

2.2. Les conditions aux interfaces

Trois types d'interfaces existent dans le milieu: les interfaces gaz-liquide (A_{gl}), gaz-solide (A_{gs}) et liquide-solide (A_{ls}).

Sur les interfaces A_{gl} , du point de vue du problème de diffusion massique (3), on considère qu'il y a équilibre liquide-vapeur (ω_{vs} désigne la vapeur saturante) en négligeant les effets de courbure de l'interface:

$$\text{sur } A_{gl} \quad \omega_v = \omega_{vs}(T_g). \quad (5)$$

L'interface A_{gs} , de normale extérieure à la phase gazeuse n_i^g , est imperméable :

$$\text{sur } A_{gs} \quad -\rho_g \mathcal{D} \frac{\partial \omega_v}{\partial x_i} n_i^g = 0. \quad (6)$$

Quant à la thermique, les conditions aux limites sur les interfaces A_{gs} et A_{ls} sont de simples conditions de transmission. Par exemple :

$$\text{sur } A_{gs} \quad T_g = T_s \quad (7)$$

$$-\lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial x_i} n_i^g = -\lambda_g \frac{\partial T_g}{\partial x_i} n_i^g. \quad (8)$$

Le problème est plus complexe sur les interfaces A_{gl} où il faut également prendre en compte le transfert de chaleur latente dû à l'évaporation ou à la condensation de la vapeur. Soit à la place de la relation (8) :

$$-\lambda_g \frac{\partial T_g}{\partial x_i} n_i^g = -\lambda_l \frac{\partial T_l}{\partial x_i} n_i^g + \rho_g \mathcal{D} \Delta h_v \frac{\partial \omega_v}{\partial x_i} n_i^g. \quad (9)$$

3. FORMULATION DES EQUATIONS MOYENNES

3.1. Volume élémentaire représentatif

Les équations précédentes vont être écrites en valeur moyenne sur un volume (V) que l'on déplace par translation dans le milieu. Les différentes grandeurs en un point donné seront alors les valeurs moyennes de ces grandeurs sur ce volume (V). La validité d'une telle démarche repose sur l'existence d'un volume de dimension caractéristique (r_0) qui soit *élémentaire* en comparaison de la dimension macroscopique du milieu (L) mais de taille suffisante par rapport à la dimension microscopique des pores (l) pour que les valeurs moyennes observées soient statistiquement *représentatives* ($l \ll r_0 \ll L$). Pour une discussion de cette question classique le lecteur est renvoyé à la réf. [6].

3.2. Définition des différentes moyennes

Selon la méthode classique initiée par Gray [7], Marle [8], Slattery [9], Whitaker [10], la valeur moyenne $\langle \psi_\alpha \rangle$ d'une grandeur ψ_α définie sur la phase (α) est donnée par :

$$\langle \psi_\alpha \rangle = \frac{1}{V} \int_{V_\alpha} \psi_\alpha dV \quad (10)$$

et la moyenne $\langle \psi_\alpha \rangle^\alpha$ intrinsèque à la phase (α) par :

$$\langle \psi_\alpha \rangle^\alpha = \frac{1}{V_\alpha} \int_{V_\alpha} \psi_\alpha dV = \frac{1}{\varepsilon_\alpha} \langle \psi_\alpha \rangle \quad (11)$$

où ε_α désigne la fraction volumique de la phase α .

3.3. Dérivées spatiales et temporelles d'une valeur moyenne

Comment s'expriment les dérivées spatiales et temporelles de la valeur moyenne $\langle \psi_\alpha \rangle$? La dérivée temporelle de $\langle \psi_\alpha \rangle$ résulte d'une application directe du théorème du transport. La phase (α) étant fixe dans

le temps, les opérateurs "valeur moyenne" et "dérivée par rapport au temps" commutent. En revanche pour l'opérateur "dérivée spatiale", on a le résultat classique (voir [11] pour un examen récent et rigoureux de cette question) :

$$\left\langle \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_i} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \psi_\alpha \rangle + \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{1}{V} \int_{A_{\alpha\beta}} \psi_\alpha n_i^\alpha dA. \quad (12)$$

Dans le terme intégral, il peut être commode de distinguer la valeur moyenne intrinsèque $\langle \psi_\alpha \rangle^\alpha$ et la fluctuation $\tilde{\psi}_\alpha$ en introduisant la décomposition suggérée par Gray [7] :

$$\psi_\alpha = \langle \psi_\alpha \rangle^\alpha + \tilde{\psi}_\alpha. \quad (13)$$

La relation (12) peut alors être écrite sous sa forme spéciale [12] :

$$\left\langle \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_i} \right\rangle = \varepsilon_\alpha \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \psi_\alpha \rangle^\alpha + \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{1}{V} \int_{A_{\alpha\beta}} \tilde{\psi}_\alpha n_i^\alpha dA. \quad (14)$$

Une justification rigoureuse de ce résultat est donnée en annexe.

3.4. Forme moyenne de l'équation de la chaleur pour la phase α

En supposant que les propriétés thermophysiques ne varient pas significativement à l'intérieur du volume élémentaire représentatif, une première application du théorème de prise de moyenne (12) à l'équation (4) conduit à :

$$(\rho c_p)_\alpha \frac{\partial \langle T_\alpha \rangle}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle \lambda_\alpha \frac{\partial T_\alpha}{\partial x_i} \right\rangle + \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{1}{V} \int_{A_{\alpha\beta}} \lambda_\alpha \frac{\partial T_\alpha}{\partial x_i} n_i^\alpha dA. \quad (15)$$

Une seconde application compte tenu de la relation (14) permet d'écrire :

$$(\rho c_p)_\alpha \frac{\partial \langle T_\alpha \rangle}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \lambda_\alpha \left[\varepsilon_\alpha \frac{\partial \langle T_\alpha \rangle^\alpha}{\partial x_i} + \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{1}{V} \int_{A_{\alpha\beta}} \tilde{T}_\alpha n_i^\alpha dA \right] \right\} + \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{1}{V} \int_{A_{\alpha\beta}} \lambda_\alpha \frac{\partial T_\alpha}{\partial x_i} n_i^\alpha dA. \quad (16)$$

3.5. Forme moyenne de l'équation de la chaleur

Une hypothèse simplificatrice classique consiste à supposer l'équilibre thermique local [13, 14]. Sa validité est assurée ici par un temps de contact long entre les différentes phases, c'est-à-dire par un nombre de Fourier local (donc construit avec l'échelle de longueur (l) caractéristique de la taille des pores) grand pour des temps d'observation des phénomènes à l'échelle (L) du milieu du fait de la contrainte ($l \ll r_0 \ll L$).

On peut alors considérer que les températures moyennes intrinsèques de chaque phase sont égales. Soit :

$$\langle T_g \rangle^g = \langle T_l \rangle^l = \langle T_s \rangle^s = \langle T \rangle. \quad (17)$$

Dans ces conditions, une équation de la chaleur globale peut être formée en sommant les relations (16) pour $\alpha = g, l, s$. Rappelons que nous nous intéressons ici essentiellement au problème thermique et que nous avons supposé le liquide immobile. Par voie de conséquence les différentes fractions volumiques sont peut-être des fonctions de l'espace mais sont indépendantes du temps. D'où, il vient compte tenu des conditions aux limites (7)–(9) :

$$\begin{aligned} \langle \rho c_p \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\varepsilon_g \lambda_g + \varepsilon_l \lambda_l + \varepsilon_s \lambda_s) \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_i} \right. \\ &+ \frac{1}{V} (\lambda_g - \lambda_s) \int_{A_{gs}} \tilde{T}_g n_i^g dA + \frac{1}{V} (\lambda_l - \lambda_s) \int_{A_{ls}} \tilde{T}_l n_i^l dA \\ &\left. + \frac{1}{V} (\lambda_g - \lambda_l) \int_{A_{gl}} \tilde{T}_g n_i^g dA \right] - \Delta h_v \langle \dot{m} \rangle \quad (18) \end{aligned}$$

en ayant posé (loi des mélanges) :

$$\langle \rho c_p \rangle = \varepsilon_g \rho_g c_{p_g} + \varepsilon_l \rho_l c_{p_l} + \varepsilon_s \rho_s c_{p_s} \quad (19)$$

et en désignant par $\langle \dot{m} \rangle$ la quantité d'eau qui s'évapore par unité de volume et de temps à l'intérieur du volume élémentaire représentatif. Soit :

$$\langle \dot{m} \rangle = \frac{1}{V} \int_{A_{gl}} \rho_g \mathcal{D} \frac{\partial \omega_v}{\partial x_i} n_i^g dA. \quad (20)$$

3.6. Forme moyenne de l'équation de la diffusion en phase gazeuse

La procédure appliquée précédemment à l'équation de la chaleur peut évidemment se transposer à l'équation de la diffusion en phase gazeuse. Il vient alors :

$$\begin{aligned} \varepsilon_g \rho_g \frac{\partial \langle \omega_v \rangle^g}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\varepsilon_g \rho_g \mathcal{D} \frac{\partial \langle \omega_v \rangle^g}{\partial x_i} \right. \\ &\left. + \frac{\rho_g \mathcal{D}}{V} \int_{A_{gl} + A_{gs}} \tilde{\omega}_v n_i^g dA \right] + \langle \dot{m} \rangle. \quad (21) \end{aligned}$$

L'application du principe de l'équilibre thermodynamique local (fondé sur les mêmes arguments que l'équilibre thermique au paragraphe précédent) entraîne que (sans effet hygroscopique) :

$$\langle \omega_v \rangle^g = \omega_{vs}(\langle T \rangle). \quad (22)$$

Nous excluons a priori le cas de pores fermés où l'équilibre liquide-vapeur serait impossible à réaliser.

Dans la suite, on posera :

$$\delta = \left(\frac{\partial \omega_{vs}}{\partial T} \right)_p. \quad (23)$$

4. FERMETURE DU SYSTEME D'EQUATIONS

Les équations (18) et (21) qui régissent le problème au niveau macroscopique font apparaître des termes de fluctuations spatiales qu'il faut chercher à exprimer. C'est précisément à cette fermeture du système qu'est consacré ce paragraphe.

4.1. Principe de la méthode

La méthode utilise le schéma général de fermeture proposé par Crapiste *et al.* [15]. A titre d'exemple, l'équation (4) en utilisant la décomposition (13) s'écrit :

$$\begin{aligned} (\rho c_p)_\alpha \frac{\partial \langle T_\alpha \rangle^\alpha}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_\alpha \frac{\partial \langle T_\alpha \rangle^\alpha}{\partial x_i} \right) \\ = - \left\{ (\rho c_p)_\alpha \frac{\partial \tilde{T}_\alpha}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_\alpha \frac{\partial \tilde{T}_\alpha}{\partial x_i} \right) \right\}. \quad (24) \end{aligned}$$

L'application de l'opérateur moyenne intrinsèque sur le volume V_α aux deux membres de l'équation (24) laisse le premier membre inchangé pourvu que la contrainte ($r_0/L \ll 1$) soit vérifiée. La justification de ce point est aisée à l'aide des développements de Taylor du type (A3) et d'une évaluation des ordres de grandeur des différents termes fondée sur le principe utilisé dans l'annexe.

D'autre part le raisonnement du paragraphe 3.5 démontre que pour des temps caractéristiques d'observation du milieu à l'échelle L , le problème local en \tilde{T}_α peut être considéré comme permanent.

4.2. Ecriture du problème local

Sur la phase V_α ($\alpha = g, l, s$), le problème s'écrit alors :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_\alpha \frac{\partial \tilde{T}_\alpha}{\partial x_i} \right) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_\alpha \frac{\partial \tilde{T}_\alpha}{\partial x_i} \right) \right\rangle^\alpha. \quad (25)$$

De même, pour le problème de diffusion gazeuse on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho_g \mathcal{D} \frac{\partial \tilde{\omega}_v}{\partial x_i} \right) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho_g \mathcal{D} \frac{\partial \tilde{\omega}_v}{\partial x_i} \right) \right\rangle^g. \quad (26)$$

Les conditions aux limites pour le problème local se déduisent des conditions aux limites (5)–(9). Si l'on admet que les fluctuations spatiales de température sont suffisamment faibles pour linéariser la relation (22), la condition (5) entraîne :

$$\text{sur } A_{gl} \quad \tilde{\omega}_v = \delta \tilde{T}_g. \quad (27)$$

La condition d'imperméabilité (6) de la surface A_{gs} compte tenu de (22)–(23) devient :

$$\text{sur } A_{gs} \quad \left(\delta \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{\omega}_v}{\partial x_i} \right) n_i^g = 0. \quad (28)$$

Les conditions (7) et (8) de transmission pour le problème thermique sur A_{gs} et A_{ls} se transforment en :

$$\text{sur } A_{gs} \quad \tilde{T}_g = \tilde{T}_s \quad (29)$$

$$-\lambda_g \frac{\partial \tilde{T}_g}{\partial x_i} n_i^g + \lambda_s \frac{\partial \tilde{T}_s}{\partial x_i} n_i^s + (\lambda_s - \lambda_g) \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_i} n_i^g = 0. \quad (30)$$

Enfin sur l'interface A_{gl} , la condition (30) doit être remplacée compte tenu de (22) et (27) par :

$$\text{sur } A_{gl}$$

$$\begin{aligned}
 & -\lambda_g \frac{\partial \tilde{T}_g}{\partial x_i} n_i^g + \lambda_l \frac{\partial \tilde{T}_l}{\partial x_i} n_i^g + (\lambda_l - \lambda_g) \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_i} n_i^g \\
 & -\rho_g \mathcal{D} \Delta h_v \frac{\partial \tilde{\omega}_v}{\partial x_i} n_i^g - \lambda_{\text{dif}} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_i} n_i^g = 0 \quad (31)
 \end{aligned}$$

en ayant posé

$$\lambda_{\text{dif}} = \delta \rho_g \mathcal{D} \Delta h_v = \frac{\mathcal{D}}{RT} \Delta h_v \frac{M_a M_v}{M} \frac{dp_{v,s}}{dT} \quad (32)$$

4.3. Solution du problème local

La solution du problème local est cherchée sous la forme:

$$\tilde{T}_\alpha = \chi_j^\alpha \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} \quad (33)$$

et

$$\tilde{\omega}_v = \delta (\chi_j^g + \xi_j^g) \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} \quad (34)$$

Dans l'écriture du problème en χ_j^α et ξ_j^g nous allons considérer que le gradient moyen de température $\partial \langle T \rangle / \partial x_i$ est sensiblement constant ou plus précisément que les dérivées spatiales de $\langle T \rangle$ qui varient sur des échelles de longueur de l'ordre de L sont négligeables devant les dérivées spatiales des variables locales χ_j^α et ξ_j^g qui varient sur des échelles de longueur l .

Le problème en χ_j^α et ξ_j^g s'écrit alors:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \chi_j^\alpha}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (35)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \xi_j^g}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (36)$$

Les conditions aux limites sont les suivantes:

sur A_{gl}

$$\chi_j^g = \chi_j^l \quad (37)$$

$$\begin{aligned}
 & -(\lambda_g + \lambda_{\text{dif}}) \frac{\partial \chi_j^g}{\partial x_i} n_i^g + \lambda_l \frac{\partial \chi_j^l}{\partial x_i} n_i^g + (\lambda_l - \lambda_g - \lambda_{\text{dif}}) n_i^g \\
 & -\lambda_{\text{dif}} \frac{\partial \xi_j^g}{\partial x_i} n_i^g = 0 \quad (38)
 \end{aligned}$$

$$\xi_j^g = 0 \quad (39)$$

sur A_{gs}

$$\chi_j^g = \chi_j^s \quad (40)$$

$$-\lambda_g \frac{\partial \chi_j^g}{\partial x_i} n_i^g + \lambda_s \frac{\partial \chi_j^s}{\partial x_i} n_i^g + (\lambda_s - \lambda_g) n_i^g = 0 \quad (41)$$

$$\left(\delta_{ij} + \frac{\partial \chi_j^g}{\partial x_i} + \frac{\partial \xi_j^g}{\partial x_i} \right) n_i^g = 0 \quad (42)$$

Sur A_{ls} les conditions sont naturellement analogues à (40) et (41).

Enfin sur les entrées-sorties du milieu A_{ge} , A_{le} , A_{se} , χ_j^α et ξ_j^g satisfont aux conditions aux limites du problème (macroscopique) en \tilde{T}_α et $\tilde{\omega}_v$. De plus nous imposons à χ_j^α (et ξ_j^g dans le cas $A_{gl} = 0$) d'être

de moyenne nulle sur le domaine conformément à la décomposition (13) si nous voulons lever l'indétermination de la solution à une constante près due à l'homogénéité du problème.

4.4. Résolution sur une cellule-unité

De manière à obtenir une solution numérique du problème en χ_j^α et ξ_j^g , il faut se donner un modèle géométrique de milieu. Il est alors naturel de recourir à un milieu périodique (Fig. 1). Les conditions limites sur les surfaces d'entrées-sorties A_{ge} , A_{le} et A_{se} du milieu sont alors remplacées par des conditions de périodicité sur la frontière de chaque cellule.

Le problème macroscopique s'écrit alors:

$$\langle \rho c_p \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ij} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} \right) - \Delta h_v \langle \dot{m} \rangle \quad (43)$$

$$\rho_g \frac{\partial \langle \omega_v \rangle}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho_g \mathcal{D} f_{ij} \frac{\partial \langle \omega_v \rangle^g}{\partial x_j} \right) + \langle \dot{m} \rangle \quad (44)$$

avec

$$\begin{aligned}
 \lambda_{ij} = & (\varepsilon_g \lambda_g + \varepsilon_l \lambda_l + \varepsilon_s \lambda_s) \delta_{ij} + \frac{1}{V} (\lambda_g - \lambda_l) \int_{A_{gl}} \chi_j^g n_i^g dA \\
 & + \frac{1}{V} (\lambda_g - \lambda_s) \int_{A_{gs}} \chi_j^g n_i^g dA + \frac{1}{V} (\lambda_l - \lambda_s) \int_{A_{ls}} \chi_j^l n_i^l dA \quad (45)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 f_{ij} = & \varepsilon_g \left[\delta_{ij} + \frac{1}{V} \int_{A_{gl}} \chi_j^g n_i^g dA \right. \\
 & \left. + \frac{1}{V} \int_{A_{gs}} (\chi_j^g + \xi_j^g) n_i^g dA \right] \quad (46)
 \end{aligned}$$

En remarquant que dans l'équation (44), le terme d'accumulation est en général négligeable devant les termes de transport et de changement de phase, on en déduit une expression de $\langle \dot{m} \rangle$ qui permet d'écrire l'équation de l'énergie sous la forme

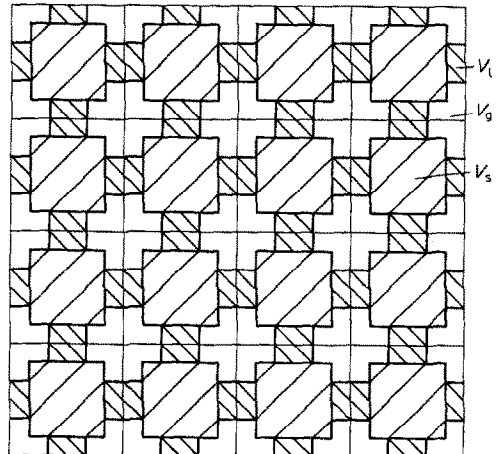


FIG. 1. Exemple de milieu périodique bidimensionnel.

$$\langle \rho c_p \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_{ij} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} \right) \quad (47)$$

avec

$$k_{ij} = \lambda_{ij} + \lambda_{\text{dif}} f_{ij}. \quad (48)$$

4.5. Remarques

(1) Si sur les parois solides A_{gs} existe un mince film liquide, parce que, du fait des irrégularités de la surface, l'eau liquide peut s'y mouvoir par capillarité, la condition à la limite de surface imperméable (42) se transforme en une condition de fraction massique imposée par la température, c'est-à-dire pour ξ_j^g une relation du type (39) ($\xi_j^g = 0$). Dans ces conditions la fonction ξ_j^g est identiquement nulle et la détermination du tenseur de conductivité thermique apparente k_{ij} revient au problème classique de la détermination de la conductivité thermique d'un milieu triphasique n'échangeant que par conduction et composé des phases :

$$\begin{aligned} V_g & \text{ de conductivité } \lambda_g + \lambda_{\text{dif}} \\ V_l & \text{ de conductivité } \lambda_l \\ V_s & \text{ de conductivité } \lambda_s. \end{aligned}$$

(2) Négliger la convection dans l'équation de la diffusion est une hypothèse inspirée par le fait que si l'on maintient les faces d'un milieu poreux à pression uniforme, le terme convectif macroscopique de loi de Darcy peut être négligé [1]. En pratique dans d'autres types de situation, il peut être plus logique de considérer que le composant air de la phase gazeuse est stagnant d'autant que cette hypothèse prévaut sur les interfaces A_{gl} . Dans ce cas si la concentration molaire est sensiblement constante, l'équation de la diffusion s'écrit à l'aide de la fraction molaire de vapeur x_v :

$$\frac{\partial x_v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\mathcal{D} \frac{\partial}{\partial x_i} \ln(1 - x_v) \right]. \quad (49)$$

Le calcul peut alors être repris et les résultats sont inchangés en posant à la place de δ et de λ_{dif} :

$$\delta^* = \frac{1}{1 - x_{vs} \langle \langle T \rangle \rangle} \frac{1}{P} \frac{dp_{vs}}{dT} \quad (50)$$

$$\lambda_{\text{dif}}^* = \frac{\mathcal{D}}{RT} M_v \Delta h_v \frac{\frac{dp_{vs}}{dT}}{1 - x_{vs} \langle \langle T \rangle \rangle}. \quad (51)$$

La valeur λ_{dif}^* est précisément celle introduite par Krischer [16].

(3) Si l'on prend en compte les deux remarques précédentes, le résultat obtenu est exactement celui proposé par Krischer sur des bases empiriques quand toutes les parois des pores sont humides [16].

5. SOLUTIONS DU PROBLEME

5.1. Milieux en série

Résolvons le problème précédent dans le cas mono-dimensionnel de la Fig. 2. Nous ne distinguons que

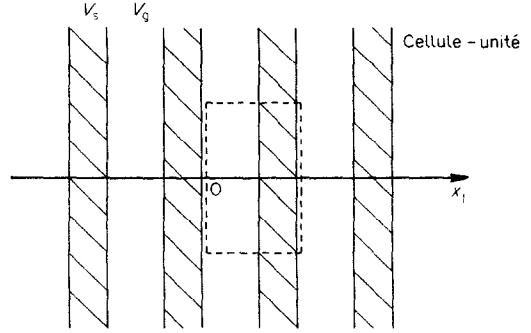


FIG. 2. Modèle série.

deux phases : une phase indistinctement liquide ou solide (s) dont nous supposons les parois humides et une phase gazeuse (g). Conformément à la remarque du paragraphe précédent :

$$\xi_j^g \equiv 0. \quad (52)$$

Le problème en χ_1^s et χ_1^g s'écrit :

$$\frac{d^2 \chi_1^s}{dx_1^2} = 0 \quad (53)$$

$$\frac{d^2 \chi_1^g}{dx_1^2} = 0. \quad (54)$$

Les conditions aux limites sur la paroi humide A_{gs} s'écrivent :

$$\text{sur } A_{\text{gs}} \quad \chi_1^g = \chi_1^s \quad (55)$$

$$(\lambda_{\text{dif}} + \lambda_g) \frac{d\chi_1^g}{dx_1} = \lambda_s \frac{d\chi_1^s}{dx_1} + (\lambda_s - \lambda_g - \lambda_{\text{dif}}). \quad (56)$$

Enfin χ_1^g et χ_1^s sont périodiques et de moyenne nulle sur une période.

La solution est obtenue sans difficultés, soit avec les notations de la Fig. 2 :

$$\chi_1^s = \frac{\varepsilon_g [(\lambda_g + \lambda_{\text{dif}}) - \lambda_s]}{\varepsilon_g \lambda_s + \varepsilon_s (\lambda_g + \lambda_{\text{dif}})} \left(x_1 - \frac{e_s}{2} \right) \quad \text{pour } 0 \leq x_1 \leq e_s \quad (57)$$

$$\chi_1^g = \frac{\varepsilon_s [\lambda_s - (\lambda_g + \lambda_{\text{dif}})]}{\varepsilon_g \lambda_s + \varepsilon_s (\lambda_g + \lambda_{\text{dif}})} \left(x_1 - e_s - \frac{e_g}{2} \right) \quad \text{pour } e_s \leq x_1 \leq e_s + e_g. \quad (58)$$

A l'aide des relations (45), (46) et (48), on déduit aisément les valeurs de λ , f et k :

$$\lambda = \frac{1}{\frac{\varepsilon_g}{\lambda_g} + \frac{\varepsilon_s}{\lambda_s}} \left[\frac{1 + \varepsilon_s \frac{\lambda_{\text{dif}}}{\lambda_g}}{1 + \frac{\varepsilon_s \lambda_{\text{dif}}}{\varepsilon_g \lambda_s + \varepsilon_s \lambda_g}} \right] \quad (59)$$

$$f = \frac{\frac{\varepsilon_g}{\lambda_g + \lambda_{\text{dif}}}}{\frac{\varepsilon_s}{\lambda_s} + \frac{\varepsilon_g}{\lambda_g + \lambda_{\text{dif}}}} \quad (60)$$

$$k = \frac{1}{\frac{\varepsilon_g}{\lambda_g + \lambda_{\text{dif}}} + \frac{\varepsilon_s}{\lambda_s}} \quad (61)$$

L'analyse de ce cas rudimentaire est riche d'enseignements :

(1) Conformément à la remarque du paragraphe 4.5, la conductivité thermique apparente k est bien obtenue en mettant en série la phase solide et la phase gazeuse avec une conductivité équivalente ($\lambda_g + \lambda_{\text{dif}}$).

(2) La conductivité thermique "vraie" λ (au sens où c'est elle qui apparaît dans l'écriture de la loi de Fourier) n'est pas égale à la conductivité thermique λ_0 obtenue en supposant que le milieu n'échange que par conduction :

$$\lambda_0 = \frac{1}{\frac{\varepsilon_g}{\lambda_g} + \frac{\varepsilon_s}{\lambda_s}} \quad (62)$$

(3) Enfin et surtout le facteur de résistance à la diffusion f n'est pas nul comme pourrait le laisser supposer une interprétation hâtive puisque la phase gazeuse est discontinue.

5.2. Examen d'un cas bidimensionnel

Le problème précédent peut être résolu pour la géométrie bidimensionnelle de la Fig. 3. Il faut d'abord remarquer que le caractère schématique d'un tel modèle entraîne les conséquences suivantes :

(1) Du point de vue de la surface A_{gl} , il y a discontinuité entre le milieu anhydre et le milieu humide quand la saturation S tend vers 0.

(2) Au delà d'une saturation ($S \approx 0,86$ ici) correspondant aux interfaces A_{gl} dans le prolongement des parois solides, il n'y a pas de manière évidente de saturer le milieu. Aussi avons-nous simplement

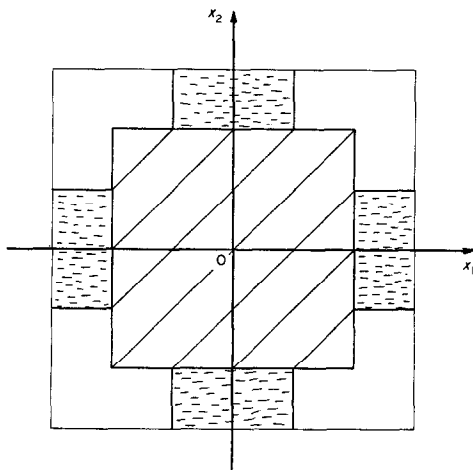


FIG. 3. Cellule-unité : $\varepsilon_g + \varepsilon_l = 0,4375$; $\lambda_g = 0,03 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$; $\lambda_l = 0,6 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$; $\lambda_s = 1,0 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

considéré les valeurs extrêmes et relié les points par un segment de droite.

Un tel modèle est à l'évidence isotrope. Pour calculer la valeur λ_{11} , il suffit de raisonner sur le quadrant $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$ de la Fig. 3. Du fait des symétries du problème, les conditions de périodicité sur la frontière de la cellule unité peuvent être remplacées par les conditions aux limites suivantes :

en $x_1 = 0$ et $x_1 = e$

$$\chi_1^g = \xi_1^g = 0 \quad (63)$$

en $x_2 = 0$ et $x_2 = e$

$$\frac{\partial \chi_1^g}{\partial x_2} = \frac{\partial \xi_1^g}{\partial x_2} = 0. \quad (64)$$

La solution obtenue avec ce jeu de conditions (63) et (64) ne satisfait pas à l'exigence d'une moyenne nulle pour les fonctions χ_1^g et ξ_1^g . Elles ne sont en fait définies qu'à une constante additive près sans importance pour le calcul de λ_{ij} et f_{ij} comme on peut le vérifier sur les relations (45) et (46) en se rappelant naturellement que ces fonctions sont périodiques. La méthode de résolution retenue est une méthode de différences finies (Gauss-Seidel à cinq points).

On calcule d'abord la conductivité thermique λ_0 sans prise en compte des effets d'évaporation-condensation (Fig. 4).

Ensuite deux cas ont été considérés selon que les parois A_{gs} sont "sèches" ou "humides". Dans le cas où les parois sont "sèches", la conductivité thermique vraie λ est toujours peu différente de λ_0 quelle que soit

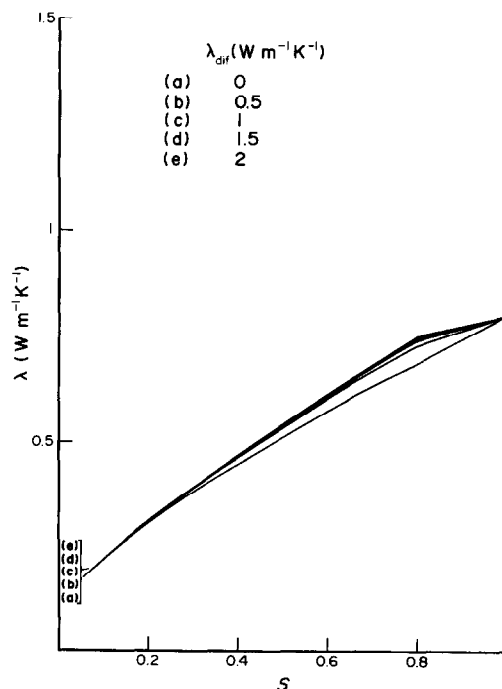


FIG. 4. Conductivité thermique vraie λ en fonction de la saturation S (cas des parois "sèches").

la valeur de λ_{dir} (Fig. 4). En revanche dans le cas où les parois sont "humides" (Fig. 5), l'influence de λ_{dir} sur la valeur de λ est suffisamment importante pour que l'on ne puisse la confondre avec λ_0 (ce qui est pourtant le principe de l'analyse de Philip et De Vries [3-5]).

En pratique, il est impossible d'accéder expérimentalement à λ . Sous réserve de réaliser une manipulation ne mettant pas en jeu d'autres gradients que le gradient de température, k est le seul paramètre thermique mesurable [1]. Les Figs. 6 et 7 représentent ses variations dans les deux cas "parois sèches" et "humides". On constate d'abord que ce paramètre est très sensible aux variations de λ_{dir} . D'autre part si l'on compare ce modèle théorique aux courbes expérimentales déterminées pour un lit de billes de verre [2] (de porosité et conductivités voisines), le cas "parois humides" est une bonne représentation de la réalité expérimentale bien que le comportement aux faibles saturations ($k \rightarrow \lambda_0$ pour $S \rightarrow 0$) ne puisse être décrit à l'aide de ce modèle. Toutefois celui-ci nous semble pouvoir être interprété de la manière suivante: dans le mouillage des parois solides, deux phénomènes doivent être distingués; d'abord le mouillage "local" dû aux irrégularités des parois solides qui, lorsque l'eau liquide est présente dans "un" pore, assure qu'elle tapisse l'ensemble des parois; ensuite le transport de l'eau liquide à "grande" distance qui assure la présence de l'eau en tout point du milieu. La valeur critique de la saturation permettant la continuité macroscopique de la phase liquide est généralement appelée saturation irréductible. En deçà de cette valeur, de notre point de vue, il y a coexistence de zones sèches et humides, au-delà les parois des pores

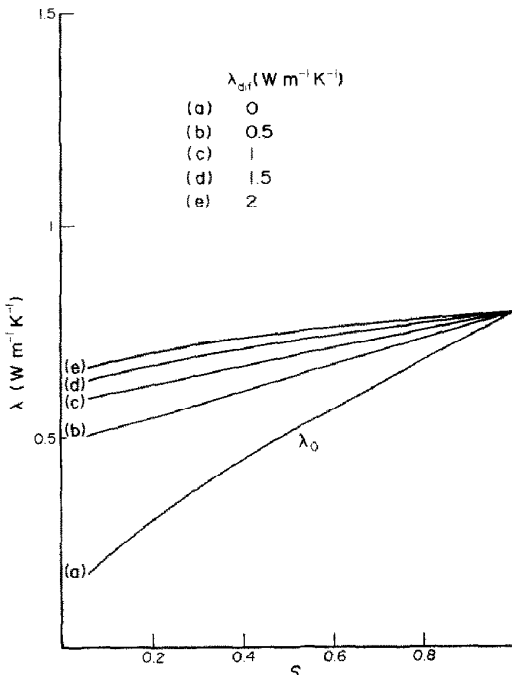


FIG. 5. Conductivité thermique vraie λ en fonction de la saturation S (cas des parois "humides").

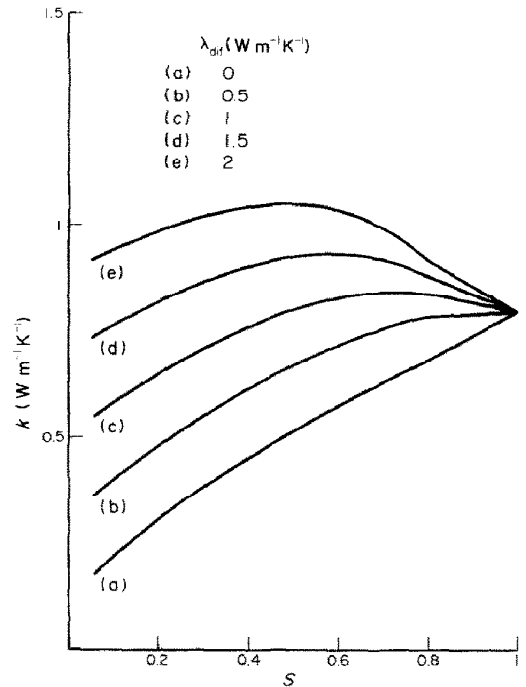


FIG. 6. Conductivité thermique apparente k en fonction de la saturation S (cas des parois "sèches").

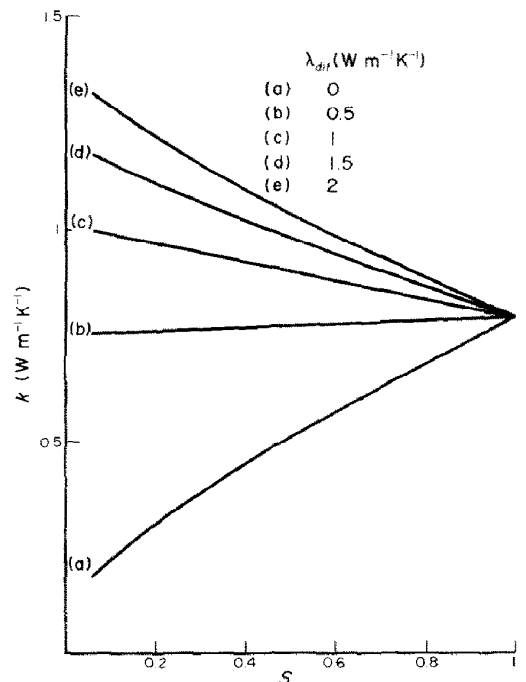


FIG. 7. Conductivité thermique apparente k en fonction de la saturation S (cas des parois "humides").

peuvent être considérées comme complètement humides. Cette analyse justifie la coïncidence du maximum observé pour k et de la saturation irréductible [2]. Au-dessous de cette valeur, l'analyse locale développée ici devrait être reprise et une seconde homogénéisation devrait être envisagée à une échelle

plus grande que la taille des pores pour traiter la présence simultanée des zones sèches et humides.

Le facteur f de résistance à la diffusion est donné par les Figs. 8 et 9. Conformément à l'intuition que l'on peut avoir d'un tel coefficient, il n'est pas très différent du facteur ϵ_g introduit par simple application de la "loi" de Dupuit. Dans le cas où les parois sont

humides, f ne dépend que du problème thermique en χ^2 et en accord avec la discussion classique, f peut être notablement plus grand que ϵ_g dans la mesure où, pour $(\lambda_g + \lambda_{dir})$ inférieur à λ_l et λ_s , le gradient de température moyen dans la phase gazeuse est supérieur au gradient moyen dans le milieu.

Le facteur f_{exp} déterminé par l'analyse de De Vries

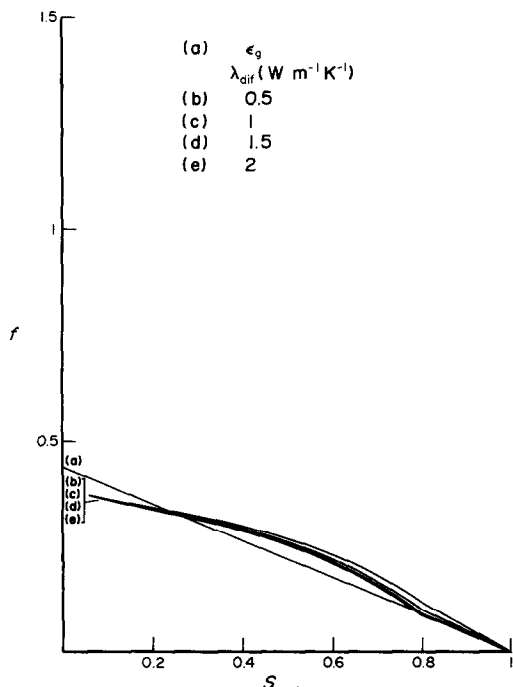


FIG. 8. Facteur f de résistance à la diffusion en fonction de la saturation S (cas des parois "sèches").

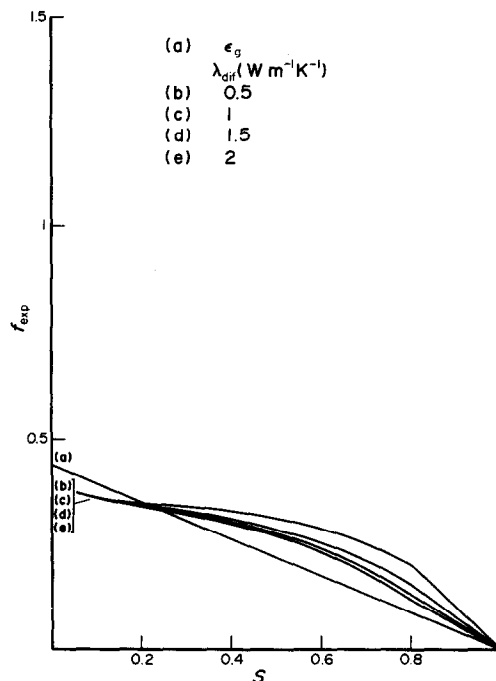


FIG. 10. Facteur expérimental de De Vries f_{exp} en fonction de la saturation S (cas des parois "sèches").

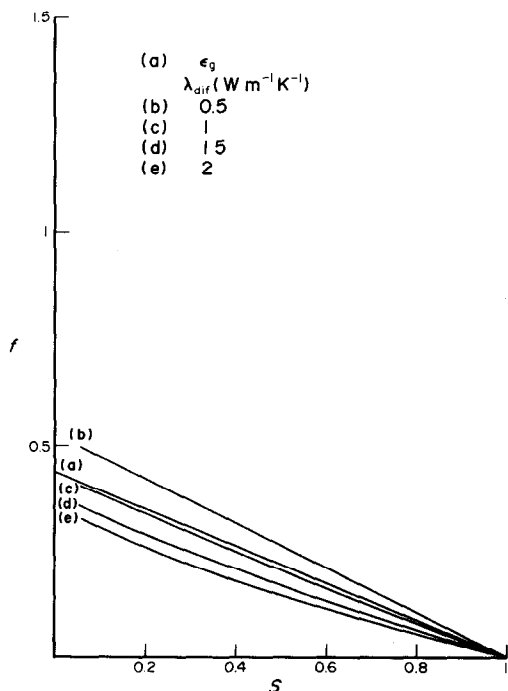


FIG. 9. Facteur f de résistance à la diffusion en fonction de la saturation S (cas des parois "humides").

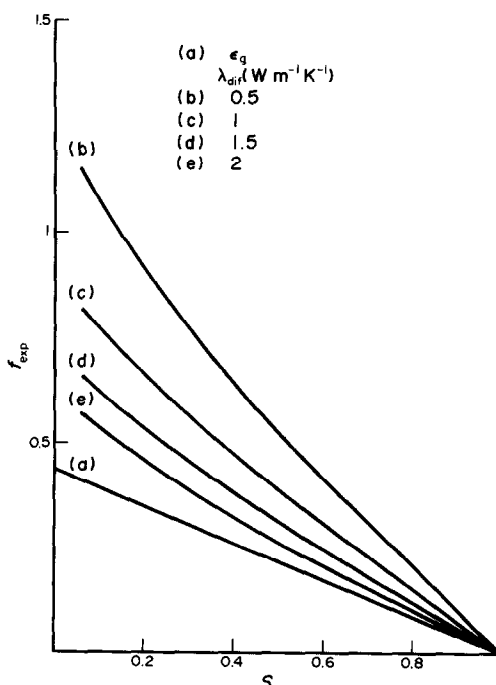


FIG. 11. Facteur expérimental de De Vries f_{exp} en fonction de la saturation S (cas des parois "humides").

et introduit par l'équation (2) est représenté sur les Figs. 10 et 11. Comme nous l'avions déjà remarqué à propos de k , la réalité expérimentale [2] est mieux décrite dans l'hypothèse "parois humides": les valeurs de f_{exp} bien supérieures à celles de f avoisinent et même peuvent dépasser l'unité. Ce résultat est en parfait accord avec les valeurs expérimentales élevées observées pour f_{exp} et jugées "anormales". En effet f_{exp} est confondu indûment avec le facteur de résistance à la diffusion f et l'on s'étonne alors d'une si grande mobilité de la vapeur au sein du milieu poreux [3-5, 17, 18]. Une stratification des courbes, f_{exp} variant en sens inverse de λ_{diff} , est observée. Cette tendance semble nettement plus accusée que sur les courbes expérimentales pour lesquelles on peut se satisfaire d'une courbe unique (encore que cette variation soit acceptable au vu de la dispersion des résultats expérimentaux [2]). Il est cependant important de noter que l'unicité de la relation $f_{\text{exp}}(S)$ apparaît comme une simplification expérimentale raisonnable mais qu'elle n'est pas fondée théoriquement.

6. CONCLUSION

A l'aide de la méthode de prise de moyenne, nous avons réexaminé sur le plan théorique la notion de conductivité thermique des milieux poreux humides. Devant la complexité des mécanismes mis en jeu, nous avons simplifié le problème en négligeant le mouvement convectif de la phase gazeuse. Dans le cas simple de milieux en série, le calcul peut être mené jusqu'à son terme; dans un cas bidimensionnel il a été nécessaire de recourir à une résolution numérique.

Cette analyse "rigoureuse" est comparée aux théories classiques de Krischer et de De Vries ainsi qu'à nos résultats expérimentaux précédemment publiés. Elle conduit à distinguer clairement la conductivité thermique λ_0 du milieu n'échangeant que par conduction et la conductivité thermique vraie λ introduite par la loi de Fourier qui est sensible aux effets d'évaporation-condensation. Les résultats sont très sensibles à la distribution de la phase liquide à l'intérieur des pores et en particulier deux cas sont distingués selon que les parois des pores A_{gs} sont "sèches" ou "humides". Le cas "humide" conduit à des résultats plus en accord avec l'expérience et donne pour la conductivité thermique apparente k le résultat de Krischer. La confrontation avec l'analyse de De Vries démontre la nécessité de distinguer le facteur de résistance à la diffusion f de la valeur déduite expérimentalement f_{exp} en confondant λ et λ_0 . Cette distinction, de notre point de vue, clôt la controverse née de l'apparente sous-estimation théorique de la densité de flux de vapeur en milieu poreux.

REFERENCES

1. C. Moyne et A. Degiovanni, Conductivité thermique des matériaux poreux humides: évaluation théorique et possibilité de mesure, *Int. J. Heat Mass Transfer* **30**, 2225-2245 (1987).

2. A. Azizi, C. Moyne et A. Degiovanni, Approche expérimentale et théorique de la conductivité thermique des milieux poreux humides—I. Expérimentation, *Int. J. Heat Mass Transfer* **31**, 2305-2317 (1988).
3. J. R. Philip and D. A. De Vries, Moisture movement in porous material under temperature gradient, *Trans. Am. Geophys. Un.* **38**, 222-232 (1957).
4. D. A. De Vries, Simultaneous transfer of heat and moisture in porous media, *Trans. Am. Geophys. Un.* **39**, 909-916 (1958).
5. D. A. De Vries, The theory of heat and moisture transfer in porous media revisited, *Int. J. Heat Mass Transfer* **30**, 1343-1350 (1987).
6. S. Whitaker, Advances in the theory of fluid motion in porous media, *I.E.C.* **61**, 14-28 (1969).
7. W. G. Gray, A derivation of the equations for multi-phase transport, *Chem. Engng Sci.* **30**, 229-233 (1975).
8. C. Marle, Application des méthodes de la thermodynamique des processus irréversibles à l'écoulement d'un fluide à travers un milieu poreux, *Bull. RILEM* No. 29, 107-117 (1965).
9. J. C. Slattery, Flow of viscoelastic fluid through porous media, *A.I.Ch.E. JI* **13**, 1066-1071 (1967).
10. S. Whitaker, Diffusion and dispersion in porous media, *A.I.Ch.E. JI* **13**, 420-427 (1967).
11. F. A. Howes and S. Whitaker, The spatial averaging theorem revisited, *Chem. Engng Sci.* **40**, 1387-1392 (1985).
12. R. G. Carbonell and S. Whitaker, Heat and mass transfer in porous media. In *Fundamentals of Transport in Porous Media* (Edited by J. Bear and M. Y. Corapcioglu), NATO ASI Series, pp. 121-198. Martinus Nijhoff, The Hague (1984).
13. S. Whitaker, Heat and mass transfer in granular porous media. In *Advances in Drying*, Vol. 1, pp. 23-61. Hemisphere, New York (1980).
14. J. C. Slattery, *Momentum, Energy and Mass Transfer in Continua*. Krieger, Huntington, New York (1981).
15. G. H. Crapiste, E. Rotstein and S. Whitaker, A general closure scheme for the method of volume averaging, *Chem. Engng Sci.* **41**, 227-235 (1986).
16. O. Krischer und K. Kroll, *Die wissenschaftlichen Grundlagen der Trocknungstechnik*. Springer, Berlin (1962).
17. W. A. Jury and J. Letey, Jr., Water vapor movement in soil: reconciliation of theory and experiment, *Soil Sci. Soc. Am. J.* **43**, 823-827 (1979).
18. A. Cass, G. S. Campbell and T. L. Jones, Enhancement of thermal water vapor diffusion in soil, *Soil Sci. Soc. Am. J.* **48**, 25-32 (1984).

ANNEXE. FORME SPECIALE DU THEOREME DE PRISE DE MOYENNE

En partant de la relation (12) et en utilisant la décomposition (13), il vient :

$$\left\langle \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_i} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \psi_\alpha \rangle + \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{1}{V} \int_{A_{\alpha\beta}} (\langle \psi_\alpha \rangle^\alpha + \tilde{\psi}_\alpha) n_i^\alpha dA. \quad (A1)$$

Cherchons dès lors à exprimer la quantité

$$\sum_{\beta \neq \alpha} \frac{1}{V} \int_{A_{\alpha\beta}} \langle \psi_\alpha \rangle^\alpha n_i^\alpha dA.$$

Une application du théorème (12) conduit à :

$$\sum_{\beta \neq \alpha} \frac{1}{V} \int_{A_{\alpha\beta}} \langle \psi_\alpha \rangle^\alpha n_i^\alpha dA = \left\langle \frac{\partial \langle \psi_\alpha \rangle^\alpha}{\partial x_i} \right\rangle - \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \langle \psi_\alpha \rangle^\alpha \rangle \quad (A2)$$

où $\langle \psi_\alpha \rangle^\alpha$ est une fonction que l'on considère ici uniquement définie sur la phase (α).

Développons alors en série de Taylor, la quantité $\langle \psi_\alpha \rangle^\alpha$ à partir d'un point fixe M :

$$\langle \psi_\alpha \rangle^\alpha |_{M'} = \langle \psi_\alpha \rangle^\alpha |_M + y_j \frac{\partial \langle \psi_\alpha \rangle^\alpha}{\partial x_j} \Big|_M + \frac{1}{2!} y_j y_k \frac{\partial^2 \langle \psi_\alpha \rangle^\alpha}{\partial x_j \partial x_k} \Big|_M + \dots \quad (A3)$$

avec

$$y_j = (\mathbf{MM}')_j = x_j^{M'} - x_j^M.$$

A l'aide du développement (A3), un simple calcul algébrique conduit à exprimer la relation (A2) sous la forme :

$$\begin{aligned} \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\delta}} \langle \psi_\alpha \rangle^\alpha n_i^\alpha dA &= - \frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial x_i} \langle \psi_\alpha \rangle^\alpha |_M \\ &+ \left[\varepsilon_\alpha \delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{V} \int_{V_\alpha} y_j dV \right) \right] \frac{\partial \langle \psi_\alpha \rangle^\alpha}{\partial x_j} \Big|_M \\ &+ \frac{1}{2!} \left[\frac{1}{V} \int_{V_\alpha} (y_k \delta_{ij} - y_j \delta_{ik}) dV \right. \\ &\left. - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\int_{V_\alpha} y_j y_k dV \right) \right] \frac{\partial^2 \langle \psi_\alpha \rangle^\alpha}{\partial x_j \partial x_k} \Big|_M + \dots \quad (A4) \end{aligned}$$

où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker.

Si l'on appelle G_α le barycentre de la phase α contenue dans le volume élémentaire représentatif et que l'on fasse coïncider le point M avec le point fixe correspondant à un point C lié au volume élémentaire représentatif (par exemple son centre) pour lequel on veut calculer l'intégrale du membre de gauche de l'équation (A4), la relation (A4) devient :

$$\begin{aligned} \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\delta}} \langle \psi_\alpha \rangle^\alpha n_i^\alpha dA &= - \frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial x_i} \langle \psi_\alpha \rangle^\alpha - \frac{\partial}{\partial x_i} (\varepsilon_\alpha y_j^{G_\alpha}) \frac{\partial \langle \psi_\alpha \rangle^\alpha}{\partial x_j} \\ &- \frac{1}{2!} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\varepsilon_\alpha}{V} I_{jk}^\alpha \right) \frac{\partial^2 \langle \psi_\alpha \rangle^\alpha}{\partial x_j \partial x_k} + \dots \quad (A5) \end{aligned}$$

où $y_j^{G_\alpha}$ représente les coordonnées du barycentre G_α de la phase α contenue dans le volume élémentaire représentatif par rapport au point C et

$$I_{jk}^\alpha = \int_{V_\alpha} y_j y_k dV$$

le tenseur d'inertie de la phase α contenue dans ce volume au point C .

Si le milieu est "homogène", on peut penser qu'il existe un volume élémentaire représentatif tel que ses propriétés géométriques soient uniformes. Dans ce cas le second membre de (A5) est identiquement nul. Dans le cas général, essayons de donner un ordre de grandeur des différents termes du membre de droite de l'équation (A5) en supposant que les grandeurs géométriques moyennes sont assez régulières et ne varient significativement qu'à l'échelle L du milieu. Il vient :

$$\frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial x_i} \langle \psi_\alpha \rangle^\alpha \approx \frac{\varepsilon_\alpha \langle \psi_\alpha \rangle^\alpha}{L} O(1) \quad (A6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\varepsilon_\alpha y_j^{G_\alpha}) \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \psi_\alpha \rangle^\alpha \approx \frac{\varepsilon_\alpha \langle \psi_\alpha \rangle^\alpha}{L} O\left(\frac{r_0}{L}\right) \quad (A7)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{V} I_{jk}^\alpha \right) \approx \frac{\varepsilon_\alpha \langle \psi_\alpha \rangle^\alpha}{L} O\left(\frac{r_0^2}{L^2}\right). \quad (A8)$$

Si l'on admet la contrainte ($r_0 \ll L$), le second membre de l'équation (A5) peut être réduit à son premier terme. Le report de cette expression dans la relation de départ (A1) permet d'aboutir à la forme spéciale du théorème de prise de moyenne :

$$\left\langle \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_i} \right\rangle = \varepsilon_\alpha \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \psi_\alpha \rangle^\alpha + \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\delta}} \tilde{\psi}_\alpha n_i^\alpha dA. \quad (A9)$$

EXPERIMENTAL AND THEORETICAL APPROACH OF THE THERMAL CONDUCTIVITY OF WET POROUS MEDIA—II. THEORY

Abstract—The problem of the determination of the conductivity of wet porous media is revisited from a theoretical point of view using the 'volume averaging method'. Here, we only consider the heat conduction and the vapour diffusion in the gaseous phase. From heat and mass transfer balances written for each phase, we deduce an average energy equation and a vapour transport one for the continuous medium 'equivalent' to the porous medium. By means of a system closure, we obtain the homogenized values of the transport coefficients. We determine them in practice in the case of one- and two-dimensional periodic media. This analysis leads to clearly distinguish between the 'true' thermal conductivity introduced by Fourier's law and the apparent one deduced from the transfer model. Also it defines rigorously the resistance factor to gaseous diffusion in porous media. We compare it to the classical theories as well as our own experimental results (Part I). Following the most realistic assumption—from an experimental point of view—of fully wet pore walls, Krischer's analysis is correct. On the other hand, De Vries' method does not allow the resistance factor to gaseous diffusion to be obtained; indeed the 'true' thermal conductivity is not the same as would be found by taking into account conductive heat transfer only. Therefore, the observed values for this factor are far too high when using this method.

EXPERIMENTELLE UND THEORETISCHE BESTIMMUNG DER WÄRMELEITFÄHIGKEIT FEUCHTER, PORÖSER STOFFE—II. THEORIE

Zusammenfassung—Das Problem der Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit von feuchten, porösen Stoffen wird von einem theoretischen Standpunkt angegangen, indem das Volumenmittelungsverfahren angewendet wird. In dieser Arbeit sind nur Wärmeleitung und Dampfdiffusion in der Gasphase berücksichtigt. Aus den Wärme- und Stofftransportbilanzen ergibt sich für jede Phase eine gemittelte Gleichung für Energie- und Dampftransport in der Gasphase "äquivalent" zum porösen Stoff. Auf diese Weise werden homogenisierte Werte für die Transportkoeffizienten ermittelt. Praktisch bestimmen wir diese für ein- und zweidimensionale "periodische" Medien. Die Ergebnisse zeigen, daß klar unterschieden werden muß zwischen der wahren Wärmeleitfähigkeit im Fourier'schen Gesetz und der scheinbaren, die vom Transportmodell abgeleitet wurde. Es definiert auch streng den Widerstandsfaktor für die Gasdiffusion in porösen Stoffen. Wir vergleichen ihn mit klassischen Theorien und mit unseren eigenen experimentellen Ergebnissen (Teil I). Folgt man der realistischen Annahme—vom Standpunkt des Experimentators aus gesehen—nämlich voll benetzter Porenwände, ist Krischer's Methode richtig. Andererseits kann mit der De Vries-Methode der Widerstandsfaktor bei Gasdiffusion nicht berechnet werden; natürlich ist die wahre Wärmeleitfähigkeit nicht die gleiche, wie sie sich bei alleiniger Berücksichtigung der Wärmeleitung ergibt.

Deshalb sind die mit dieser Methode ermittelten Werte für diesen Faktor viel zu hoch.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ВЛАЖНЫХ ПОРИСТЫХ СРЕД—II. ТЕОРИЯ

Аннотация—Методом осреднения по объему теоретически определяется теплопроводность влажных пористых сред. В этой части работы рассматриваются только теплопроводность и диффузия пара в газовой фазе. Из записанных для каждой фазы уравнений тепло- и массопереноса выводятся усредненные уравнения энергии и переноса пара для сплошной среды, "эквивалентной" пористой среде. При замыкании системы уравнений получены усредненные значения коэффициентов переноса. Практически они определяются в случае одно- и двумерных периодических сред. Анализ позволяет провести четкое разграничение между "истинной" теплопроводностью, описываемой законом Фурье, и кажущейся, вытекающей из принятой модели переноса. Кроме того, он позволяет точно определить сопротивление диффузии газа в пористых средах. Результаты анализа сравниваются с классическими теориями, а также с экспериментальными данными, полученными в I-й части работы. На основе наиболее реалистического (с экспериментальной точки зрения) допущения о полностью влажных пористых стенках установлено, что правильным является анализ Кришера. Метод же де Вриза не позволяет определить сопротивление диффузии газа. Действительно, значение "истинной" теплопроводности отличается от значения, получаемого с учетом только кондуктивного теплопереноса. Поэтому при использовании данного метода значения коэффициента сопротивления оказываются очень завышенными.